Günther Malle, Universität Wien

WAS IST EIN VEKTOR? - ANTWORTEN AUS DER GESCHICHTE DER MATHEMATIK

1. Intuitive Vorideen zur Vektorrechnung

Die Idee des Kräfteparallelogramms (bzw. Geschwindigkeitsparallelogramms) findet sich schon in der Antike. Man findet sie in der sog. „Pseudo-Aristotelischen Mechanica", bei ARCHIMEDES und bei HERON. Über den späteren Gebrauch solcher Parallelogramme ist wenig bekannt, im 16. und 17. Jahrhundert dürften sie jedoch gängig gewesen sein. Galileo GALILEI (1564 - 1642) war anscheinend der erste, der die Parallelogrammregel expressis verbis formulierte.

Dabei ist zu beachten, daß die Kräfte bzw. Geschwindigkeiten noch nicht als spezielle Vektoren angesehen wurden und die Zusammensetzung von Kräften bzw. Geschwindigkeiten noch nicht als Addition von Vektoren. Es lag also noch keine Vektorrechnung im heutigen Sinn vor.

Die Methoden der antiken Geometrie und Physik reichten jedoch bald nicht mehr aus. Die physikalischen Probleme änderten sich so, daß immer deutlicher wurde, daß manche physikalische Größen nicht nur durch einen Betrag allein charakterisiert werden können, sondern daß zu ihrer Angabe auch eine Richtung benötigt wird. Man denke etwa an die drei Grundgesetze der Mechanik, die Isaac NEWTON (1642 - 1727) in seiner *Philosophiae naturalis Principia Mathematica* formuliert hat. In diesen ist die Rede von Kräften, Geschwindigkeiten, Impulsen und Beschleunigungen, also Größen, die wir heute als Vektoren bezeichnen würden. Diese Entwicklung setzte sich bis ins 19. Jahrhundert fort. Der physikalische Raum wurde geradezu mit Vektoren vollgestopft. Dies mußte schon frühzeitig ein Bedürfnis nach einem geeigneten Formalismus für solche Größen geweckt haben.

Eine Vision dieses Formalismus finden wir bei Gottfried Wilhelm LEIBNIZ (1646 - 1716). LEIBNIZ war ja ein großer Visionär, der viele Dinge vorausgesehen hat (man denke etwa an seine Vision einer Rechenmaschine oder einer mathematischen Universalsprache). Es ist weniger bekannt, daß LEIBNIZ auch die Vektorrechnung vorausgeahnt hat. In einem Brief an Christian HUYGENS schreibt er (in einer von mir vorgenommenen deutschen Übersetzung):

> Ich bin mit der Algebra noch nicht zufrieden, weil sie nicht die kürzesten Methoden oder schönsten Konstruktionen in der Geometrie liefert. Deshalb glaube ich, soweit es die Geometrie betrifft, daß wir eine andere Analysis brauchen, die ausdrücklich geometrisch oder linear ist und die eine Lage direkt ausdrückt wie die Algeba einen Betrag ausdrückt. Und ich glaube, daß ich den Weg gefunden habe und daß wir Figuren, ja sogar Maschinen und Bewegungen durch Symbole so ausdrücken können, wie die Algebra Zahlen oder Beträge repräsentiert.

LEIBNIZ sandte HUGYENS in diesem Brief einen Aufsatz, in dem er schrieb:

> Ich habe gewisse Elemente einer neuen Sprache gefunden, die von der Algebra grundverschieden ist und die große Vorteile aufweist, indem sie dem Geist ... auch ohne Figuren alles repräsentiert, was auf sinnlicher Wahrnehmung beruht. Algebra ist lediglich die Sprache für unbestimmte Zahlen und Beträge, aber sie drückt nicht Lage, Winkel und Bewegung direkt aus. Daher ist es oft schwierig, die Eigenschaften einer Figur durch Rechnung zu analysieren, und noch schwieriger ist es, bequeme geometrische Beweise und Konstruktionen zu finden ... Aber diese neue Sprache... kann nicht fehlgehen, die Lösung, die Konstruktion und den geometrischen Beweis zur gleichen Zeit zu geben ... . Aber ihr hauptsächlicher Wert liegt im Denken, das damit ausgeführt werden kann, sowie in den Schlüssen, die durch Operationen mit ihren Zeichen gezogen werden können und die nicht durch Figuren ... ausgedrückt werden können, ohne diese zu sehr anzuhäufen oder mit zu vielen Punkten und Geraden zu verwirren, die zu zeichnen man im Verlauf der vielen flüchtigen Versuche gezwungen ist.

Was LEIBNIZ jedoch im Gegensatz zu dieser großartigen Vision tatsächlich anzubieten hat, ist vergleichsweise dürftig. In seiner *Analysis situs* (Geometrie der Lage) entwickelt er ein System, das auf der Kongruenz von Figuren beruht und mit der heutigen Vektorrechnung so gut wie nichts gemeinsam hat. Trotzdem ist diese Analysis situs von historischer Bedeutung, weil von ihr starke Anregungen ausgingen. Die Jablonowskische Gesellschaft (eine damalige Mathematikervereinigung) schrieb einen Preis aus, der demjenigen gebühren sollte, dem es gelingt, das LEIBNIZsche System in eine Form zu bringen, die für die Geometrie und Physik brauchbar ist. Der Gewinner dieses Preises war ein deutscher Gymnasiallehrer, Hermann Günther GRASSMANN, über den wir noch sprechen werden.

2. Die Entwicklung erster vektorieller Systeme

2.1 Caspar WESSEL (1745-1818) und andere – Vektor als ortsgebundene gerichtete Strecke bzw. formaler Ausdruck der Form $x + \eta y + \varepsilon z$

Der Versuch, die komplexen Zahlen geometrisch zu deuten, hatte großen Einfluß auf die Entwicklung vektorieller Systeme. Es ist bekannt, daß an dieser geometrischen Deutung mehrere Mathematiker beteiligt waren, exemplarisch sei jedoch nur der Beitrag von WESSEL besprochen. Zunächst sei jedoch hervorgehoben, daß das vordringliche Interesse dieser Mathematiker nicht der Existenzsicherung der damals noch dubiosen komplexen Zahlen galt -wie dies heute oft fälschlich dargestellt wird -, sondern der Suche nach einem geeigneten Werkzeug für die Geometrie und die Physik, also die Suche nach einer geeigneten Vektorrechnung (in der LEIBNIZschen Tradition). Der Wunsch nach einem solchen Werkzeug war so stark, daß dafür sogar die dubiosen komplexen Zahlen herhalten mußten. Daß durch die geometrische Deutung die Dubiosität der komplexen Zahlen gemildert wurde, war ein angenehmer Nebeneffekt, aber nicht die Hauptsache.

WESSEL kennt zwei Darstellungen von komplexen Zahlen, nämlich $a + \varepsilon b$ und $r(\cos v + \varepsilon \cdot \sin v)$ wobei ε dem späteren i entspricht. Er deutet komplexe Zahlen in der bekannten Weise durch gerichtete Strecken, die vom Ursprung eines ebenen Koordinatensystems ausgehen. Er definiert dann eine Addition, Subtraktion und skalare Vervielfachung von gerichteten Strecken, ebenfalls auf die bekannte Weise.

WESSEL definiert auch ein Produkt für komplexe Zahlen, indem er die Produkte der Einheiten festsetzt:

$$(+1)(+1)=+1;\quad (+1)(-1)=-1;\quad (-1)(-1)=+1;\quad (+1)(+\varepsilon)=+\varepsilon;\quad (+1)(-\varepsilon)=-\varepsilon$$
$$(-1)(+\varepsilon)=-\varepsilon;\quad (-1)(-\varepsilon)=+\varepsilon;\quad (+\varepsilon)(+\varepsilon)=-1;\quad (+\varepsilon)(-\varepsilon)=+1;\quad (-\varepsilon)(-\varepsilon)=-1$$

Das Produkt $(a+\varepsilon b)(c+\varepsilon d)$ zweier beliebiger komplexer Zahlen kann dann berechnet werden, indem man die beiden Klammern nach den üblichen Rechenregeln ausmultipliziert und dabei die obigen Festsetzungen für die Produkte der Einheiten benutzt. WESSEL deutet dieses Produkt geometrisch auf die bekannte Weise und definiert damit ein Produkt zweier gerichteter Strecken: Das Produkt zweier gerichteter Strecken ist eine gerichtete Strecke, deren Länge das Produkt der beiden Ausgangslängen und deren Neigungswinkel die Summe der beiden Ausgangsneigungswinkel ist. Er führt auch eine Division von Strecken ein.

Dann geht WESSEL daran, die komplexen Zahlen und deren geometrische Deutung auf den Raum zu übertragen. Dabei liegt nichts näher, als neben den Einheiten 1 und ε eine dritte Einheit η anzunehmen und „Zahlen" der Form $a+\eta b+\varepsilon c$ zu betrachten (WESSEL wählt diese Reihenfolge). Er deutet diese Zahlen als gerichtete Strecken, die vom Ursprung eines räumlichen Koordinatensystems ausgehen. Es bereitet ihm keine Schwierigkeiten, die geometrischen Deutungen der Addition, Subtraktion und skalaren Vervielfachung komplexer Zahlen auf diese neuen Zahlen auszudehnen und damit entsprechende Operationen für gerichtete Strecken im Raum zu definieren. Bei der Definition des Produktes dieser Zahlen stößt er jedoch auf eine unerwartete Schwierigkeit. Zwar setzt er in Analogie zu den komplexen Zahlen $\eta\eta=\varepsilon\varepsilon=-1$, aber er findet keine Festsetzungen für $\eta\varepsilon$ und $\varepsilon\eta$, die so geartet sind, daß alle für komplexe Zahlen gültigen Rechengesetze auch für diese neuen Zahlen gelten. (Wir wissen heute aufgrund von Sätzen der modernen Algebra, daß es solche Festsetzungen nicht geben kann.) In eingeschränkten Fällen gelingt es ihm durch diverse Tricks, die Produkte $\eta\varepsilon$ und $\varepsilon\eta$ zu vermeiden, und es gelingt ihm trotz dieses Mangels seines Produktes, bedeutende Resultate der sphärischen Trigonometrie herzuleiten.

2.2 William Rowan HAMILTON (1805 - 1865) – Vektor als Zahlenpaar bzw. formaler Ausdruck der Form $a+bi+cj+dk$

HAMILTON identifiziert eine komplexe Zahl $a+bi$ mit dem Zahlenpaar (a,b), insbesondere die Zahl i mit dem Zahlenpaar $(0,1)$. Er definiert eine Addition, Subtraktion, skalare Vervielfachung und Multiplikation solcher Zahlenpaare, die den jeweiligen Operationen mit komplexen Zahlen entsprechen. Bis auf die Multiplikation stimmen diese Operationen mit den heute im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ gebräuchlichen Operationen überein. Die Darstellung komplexer Zahlen durch Zahlenpaare nahm den komplexen Zahlen viel von ihrer Mysteriosität.

Wie WESSEL plagt sich auch HAMILTON mit dem Problem herum, die komplexen Zahlen auf drei Dimensionen auszudehnen, ja er träumt sogar von einer Ausdehnung auf n Dimensionen. Er untersucht Ausdrücke der Form $(a,b,c) = a + bi + cj$. Wie WESSEL bereitet es ihm keine Probleme, eine Addition, Subtraktion und skalare Vervielfachung für solche Tripel einzuführen, wie WESSEL scheitert er jedoch am Produkt. Da er die Ergebnisse der modernen Algebra noch nicht kannte, verbrachte er große Teile seines Lebens mit der erfolglosen Suche nach einem solchen Produkt. Es gelingt HAMILTON jedoch, eine einigermaßen brauchbare Multiplikation für vierdimensionale Ausdrücke der Form $a + bi + cj + dk$ zu finden, die er *Quaternionen* nannte (bekannt nach dem quaternion der vier Knechte, die Petrus beschützten). Er setzte dazu fest.

$$\begin{aligned} &i^2 = j^2 = k^2 = -1 \\ &ij = k \quad jk = i \quad ki = j \\ &ji = -k \quad kj = -i \quad ik = -j \end{aligned}$$

Das Produkt $(a + bi + cj + dk)(e + fi + gj + hk)$ zweier beliebiger Quaternionen kann dann berechnet werden, indem man die beiden Klammern nach den üblichen Rechenregeln ausmultipliziert und die obigen Festsetzungen benutzt. Die Addition, Subtraktion und skalare Vervielfachung sind für Quaternionen analog zu den komplexen Zahlen definiert. HAMILTON zeigt, daß die Quaternionen alle üblichen Rechengesetze erfüllen, bis auf das Kommutativgesetz der Multiplikation. Die Quaternionenmultiplikation ist antikommutativ, d.h. für alle Quaternionen α, β gilt $\alpha \cdot \beta = -\beta \cdot \alpha$. Anzumerken ist auch, daß HAMILTON als erster die Gültigkeit des Assoziativgesetzes klar hervorgehoben hat.

HAMILTON überschätzte seine Quaternionen in gewaltiger Weise und sah sie als ebenbürtig mit der Schöpfung der Infinitesimalrechnung an. Mit missionarischem Eifer betrieb er ihre Verbreitung in der mathematischen Welt. Er wurde in Irland und England zu einer Gallionsfigur einer Schule von Quaternionisten, die ihren Meister an Starrheit und Intoleranz noch übertraf. Im Mittelpunkt stand ein mit Scheu und Ehrfurcht gehandhabter Formalismus, von dem man sich ganz neue Einsichten in die Mathematik und Physik erwartete. Die moderne Algebra hat jedoch gezeigt, daß die Quaternionen nicht mehr sind als ein sehr spezielles Beispiel einer sog. Algebra (siehe dazu EBBINGHAUS et al. 1983, S. 131-134).

In einem Quaternion $\alpha = a + bi + cj + dk$ bezeichnete Hamilton a als *Skalarteil* und $bi + cj + dk$ als *Vektorteil des Quaternions*, abgekürzt $S\alpha$ und $V\alpha$. Es hat den Mathematikern des 19. Jahrhunderts große Mühe bereitet, den Vektorteil von einem Quaternion zu lösen und zu einer eigenständigen Existenz zu verhelfen.

2.3 August Ferdinand MÖBIUS (1790 - 1868) – Vektor als gewichteter Punkt

MÖBIUS entwickelte in seinem *Barycentrischen Calcul* einen Kalkül für gewichtete Punkte. Er betrachtet z.B. fünf Punkte A, B, C, D, E im Raum, die die jeweilige Masse a, b, c, d, e haben. Er beweist, daß man immer einen eindeutig bestimmten Punkt S - nämlich den Schwerpunkt - finden kann, der folgende Eigenschaften hat: Legt man parallele Geraden (in irgendeine Richtung) durch die Punkte A, B, C, D, E und S und schneidet diese mit einer beliebigen Ebene, wobei A', B', C', D', E' und S' die Schnittpunkte dieser Geraden mit der Ebene sind, dann gilt:

$$a \cdot AA' + b \cdot BB' + c \cdot CC' + d \cdot DD' + e \cdot EE' = (a + b + c + d + e) \cdot SS'$$

Dabei ist $AA', BB', \ldots$ die jeweilige vorzeichenbehaftete Strecke (positiv, wenn der Punkt auf der einen Seite der Ebene liegt, negativ, wenn er auf der anderen liegt). Geht insbesondere die Ebene durch S, dann gilt:

$$a \cdot AA' + b \cdot BB' + c \cdot CC' + d \cdot DD' + e \cdot EE' = 0$$

MÖBIUS sagt nun, daß es für eine *fixe* Ebene genügt, statt der Strecken $AA', BB', \ldots$ die Punkte $A, B, \ldots$ anzugeben. Er schreibt also die obigen Gleichungen so:

$$a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C + d \cdot D + e \cdot E = (a + b + c + d + e) \cdot S$$
$$a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C + d \cdot D + e \cdot E = 0$$

Aus der ersten Gleichung ergibt sich

$$S = \frac{1}{a + b + c + d + e} (a \cdot A + b \cdot B + c \cdot C + d \cdot D + e \cdot E)$$

Der Schwerpunkt ist also eine Art gewichteter Mittelpunkt der Punkte A, B, C, D, E.

Mit solchen gewichteten Punkten führt MÖBIUS auch verschiedene andere Rechnungen aus. Sein Kalkül hat bereits große Ähnlichkeit mit dem späteren Punktmodell eines Vektorraums.

MÖBIUS führt auch zwei Produkte für gerichtete Strecken ein. Das *projektive Produkt* $\underline{AB \cdot CD}$ entspricht dem heute gebräuchlichen Skalarprodukt, das *geometrische Produkt* $\overline{AB \cdot CD}$ ist die von AB und CD aufgespannte orientierte Parallelogrammfläche (nicht dessen Inhalt). Diese Idee taucht im 19. Jahrhundert immer wieder auf.

2.4 Giusto BELLAVITIS (1803-1880) – Vektoren als äquivalente, gerichtete Strecken

BELLAVITIS führte als erster eine Äquivalenzrelation für gerichtete Strecken ein: Zwei gerichtete Strecken AB und CD heißen *äquipollent*, geschrieben $AB \simeq CD$, wenn sie gleich lang, parallel und gleich orientiert sind. Er betrachtete jedoch noch nicht die dazugehörigen „Pfeilklassen" (diese Betrachtungsweise entstand erst im 20. Jahrhundert im Rahmen der Mengenlehre). Darüber hinaus beschreibt BELLAVITIS gerichtete Strecken durch Länge und Neigungswinkel (inclinatio), wobei er die Länge einer gerichteten Strecke AB mit $\overline{AB}$ und deren Neigungswinkel (gegenüber der positiven ersten Achse) mit $inc \cdot AB$ bezeichnet. Er weist darauf hin, daß eine „Gleichung" wie z.B.

$$AB \simeq \frac{CD \cdot EF}{GH}$$

gleichbedeutend ist mit den Gleichungen

$$\overline{AB} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{EF}}{\overline{GH}} \text{ und } inc \cdot AB = inc \cdot CD + inc \cdot EF - inc \cdot GH$$

2.5 Hermann Günther GRASSMANN (1809-1877) – Vektor als (gewichteter) Punkt bzw. gerichtete Strecke bzw. Bewegung bzw. orientierte Fläche bzw. formaler Ausdruck der Form $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$

GRASSMANN entwickelte unabhängig von HAMILTON ein vektorielles System, in dem der Vektorteil eines Quaternions von Anfang an als eigenes Objekt betrachtet wurde. Seine Ausführungen hätten die Entwicklung der Vektorrechnung ein gutes Stück weiterbringen können, wenn sie seine Zeitgenossen gelesen hätten. Doch sein Werk galt als schwer lesbar bis unlesbar. (HAMILTON selbst hat zugegeben, daß er nicht über die ersten Seiten hinausgekommen ist.) Dies lag u.a. daran, daß GRASSMANN seine Ideen in einen schwer zugänglichen philosophischen Kontext verpackte. Aus heutiger Sicht betrachtet war diese philosophische Verpackung notwendig, weil es sonst GRASSMANN mit den Mitteln seiner Zeit nicht möglich gewesen wäre, seine sehr abstrakten Ideen auszudrücken. Was ihm nämlich vorschwebte, war eine Art universale Algebra, die unabhängig von der geometrischen Anschauung entwickelt und begründet werden kann, aber bei Bedarf auf die Geometrie angewandt werden kann.

Zunächst entwickelt GRASSMANN jedoch in seiner *Theorie der Ebbe und Flut* (1840, aber erst 1911 publiziert) einen Kalkül für gerichtete Strecken und wendet diesen auf die Mechanik der Gezeiten an. Er führt zunächst eine *geometrische Gleichheit* für gerichtete Strecken ein, für die er das Symbol $\doteq$ verwendet und die die Übereinstimmung in Betrag und Richtung ausdrückt. Anschließend führt er eine *geometrische Addition* für gerichtete Strecken ein, für die er das Symbol $\dot{+}$ verwendet und die gemäß der Parallelogrammregel erfolgt. Subtraktion und skalare Vervielfachung von gerichteten Strecken fließen mehr oder weniger selbstverständlich ein. GRASSMANN beweist die wichtigsten Rechengesetze für die bisher erwähnten Operationen. Anschließend behandelt er sehr kurz die Vektordifferentialrechnung (partielle Ableitungen gerichteter Strecken). Schließlich führt er zwei Produkte von gerichteten Strecken ein. Das *lineare Produkt* $a \frown b$ zweier gerichteter Strecken entspricht dem heute gebräuchlichen Skalarprodukt, das *geometrische Produkt* $a \dot{\times} b$ stellt wie bei MÖBIUS die von a und b aufgespannte, orientierte Parallelogrammfläche dar.

In seinem Hauptwerk, der *linealen Ausdehnungslehre* (1844) stellt GRASSMANN seine Ideen in einen allgemeineren und systematischeren Zusammenhang. Er entwickelt eine sehr abstrakte „Theorie der Formen". Formen sind abstrakte Elemente, die man bei Bedarf als Punkte, Zahlen, gerichtete Strecken, orientierte Flächen usw. deuten kann. Spezielle Formen sind die sog. *Ausdehnungsgrößen* (extensive Größen), die durch einen Stufenprozeß erzeugt werden. Ausgangspunkte sind dabei die sog. *Elementargrößen*, die GRASSMANN nicht näher definiert, doch meist als Punkte deutet. Durch die Bewegung eines Punktes entsteht eine Ausdehnungsgröße erster Stufe, d.h. eine gerichtete Strecke; durch die Bewegung einer gerichteten Strecke in eine geeignete Richtung entsteht eine Ausdehnungsgröße zweiter Stufe, d.h. eine orientierte Fläche; durch die Bewegung einer orientierten Fläche in eine geeignete Richtung entsteht eine Ausdehnungsgröße dritter Stufe, d.h. ein orientiertes Parallelepiped; usw. GRASSMANNs abstrakter Standpunkt erlaubt es ihm, diesen Prozeß auch für mehr als drei Dimensionen fortzusetzen. Dies ist der Beginn einer n-dimensionalen Geometrie.

GRASSMANN stellt eine Ausdehnungsgröße n-ter Stufe in der Form $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ dar, wobei $e_1, e_2, \ldots, e_n$ als *Einheiten erster Ordnung* bezeichnet werden (heute würde man sie als normierte Basisvektoren des $\mathbb{R}^n$ auffassen). Er definiert Addition, Subtraktion und skalare Vervielfachung in der üblichen Weise (koordinatenweises Vorgehen) und definiert dann verschiedene Produkte für Ausdehnungsgrößen, von denen die wichtigsten das innere und das äußere Produkt sind.

Für das *innere Produkt* $\alpha|\beta$ setzt GRASSMANN fest:

$$e_i|e_i = 1$$
$$e_i|e_j = 0 \text{ für } i \neq j$$

Das innere Produkt $(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n)|(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \cdots + \beta_n e_n)$ zweier beliebiger Ausdehnungsgrößen $n-$ter Stufe kann dann berechnet werden, indem man die beiden Klammern nach den üblichen Rechenregeln miteinander ausmultipliziert und dabei die obigen Festsetzungen benutzt. Strenggenommen bräuchte man dazu zumindest noch ein Distributivgesetz. Distributivität sah GRASSMANN jedoch als eine selbstverständliche Eigenschaft eines Produktes an.

GRASSMANN beweist die folgenden Eigenschaften des inneren Produktes:

(1) $\alpha|\beta = a \cdot b \cdot \cos\phi$, wobei $a = |\alpha|$, $b = |\beta|$, $\phi = \measuredangle(a,b)$

(2) $|\alpha| = \sqrt{\alpha|\alpha} = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \cdots + \alpha_n^2}$

Das innere Produkt stimmt also mit dem heutigen (euklidischen) Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ überein, das ja heute noch als inneres Produkt bezeichnet wird.

Für das *äußere Produkt* $[\alpha\beta]$ setzt GRASSMANN fest:

$$\begin{array}{lcl} [e_i e_i] & = & 0 \\ [e_i e_j] & = & -[e_j e_i] \text{ für } i \neq j \end{array}$$

Das äußere Produkt $[\alpha\beta]$ zweier beliebiger Ausdehnungsgrößen n-ter Stufe kann dann wiederum durch Ausmultiplizieren der beiden Klammern nach den üblichen Rechenregeln ermittelt werden. Strenggenommen bräuchte man auch hier zumindest noch ein Distibutivgesetz. Z. B. für $n = 3$:

$$\begin{aligned} [\alpha\beta] &= [(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3)(\beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3)] = \\ &= \alpha_1\beta_1[e_1 e_1] + \alpha_1\beta_2[e_1 e_2] + \alpha_1\beta_3[e_1 e_3] + \alpha_2\beta_1[e_2 e_1] + \alpha_2\beta_2[e_2 e_2] + \alpha_2\beta_3[e_2 e_3] + \\ &\quad + \alpha_3\beta_1[e_3 e_1] + \alpha_3\beta_2[e_3 e_2] + \alpha_3\beta_3[e_3 e_3] \\ &= (\alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)\ [e_2 e_3] + (\alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)\ [e_3 e_1] + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)\ [e_1 e_2] \end{aligned}$$

Daran erkennt man die Ähnlichkeit dieses Produktes mit dem heutigen Vektorprodukt. Im Gegensatz zum heutigen Vorgehen reduziert jedoch GRASSMANN die Produkte $[e_2 e_3], [e_3 e_1], [e_1 e_2]$ nicht, er setzt also nicht etwa $[e_2 e_3] = e_1$, sondern läßt diese Produkte stehen und bezeichnet sie als *Einheiten zweiter Ordnung.* Ähnlich verfährt er in höheren Dimensionen.

Im zweiten Teil der linealen Ausdehnungslehre dehnt GRASSMANN sein äußeres Produkt auf Elementargrößen (Punkte) aus. Für Elementargrößen α, β gibt er die Zusatzdefinition

$$[\alpha\beta] = \beta - \alpha$$

und deutet $[\alpha\beta]$ geometrisch als die gerichtete Strecke von Punkt α zum Punkt β.

(Die obige Festsetzung ist also nichts anderes als die wohlbekannte Regel Vektor = Endpunkt - Anfangspunkt.) Das Rechnen mit diesem Produkt mutet schon sehr modern an. Z.B. erhält GRASSMANN:

$$\begin{aligned}[][\alpha\alpha] &= \alpha-\alpha=0\\ [\alpha\beta] &= \beta-\alpha=-(\alpha-\beta)=-[\beta\alpha]\\ [\alpha\beta] &= \beta-\alpha \Rightarrow \beta=\alpha+[\alpha\beta]\end{aligned}$$

Im weiteren Verlauf entwickelt GRASSMANN auch einen Kalkül für gewichtete Punkte, ähnlich wie MÖBIUS. Dabei wird zum ersten Mal der Nullvektor als Punkt mit dem Gewicht 0 betrachtet.

2.6 Matthew O´BRIEN (1814 - 1855) – Vektor als gerichtete Strecke

O´BRIEN entwickelt einen Kalkül für gerichtete Strecken. Addition, Subtraktion und skalare Vervielfachung von gerichteten Strecken führt er auf die übliche Art ein. Die Einheitsvektoren längs der drei Koordinatenachsen bezeichnet er mit α,β,γ und er zeigt, daß jede vom Ursprung ausgehende Strecke u in der Form $u=x\alpha+y\beta+z\gamma$ dargestellt werden kann.

O´BRIEN will mit Hilfe seines Streckenkalküls vor allem Translationen gerichteter Strecken beschreiben. Dabei zerlegt er eine Translation in eine longitudinale und eine laterale Komponente. Eine Translation der gerichteten Strecke u längs der gerichteten Strecke v heißt *longitudinal*, wenn $\sphericalangle(u,v)=0^\circ$ und *lateral*, wenn $\sphericalangle(u,v)=90^\circ$.

O´BRIEN bezeichnet das Ergebnis einer longitudinalen Translation mit $u\times v$ und das Ergebnis einer lateralen Translation mit $u\cdot v$ (wobei unklar bleibt, ob damit eine Zahl, eine gerichtete Strecke oder die von u und v aufgespannte Rechtecksfläche gemeint ist). Er faßt $u\times v$ und $u\cdot v$ als Produkte auf und stellt zunächst durch geometrische Überlegungen fest, daß beide Operationen kommutativ und distributiv sind.

Algebraisch definiert er das Produkt $u\times v$ durch folgende Festsetzungen für die Einheitsvektoren:

$$\begin{aligned}\alpha\times\alpha=\beta\times\beta=\gamma\times\gamma=1\\ \alpha\times\beta=\alpha\times\gamma=\beta\times\gamma=0\end{aligned}$$

Damit zeigt er, daß für beliebige gerichtete Strecken u,v die Formel

$$u \times v = mn\cos\theta$$

gilt, wobei m die Länge von u, n die Länge von v und θ der von u und v eingeschlossene Winkel ist. Das Produkt $u \times v$ entspricht also dem heute gebräuchlichen Skalarprodukt.

Das Produkt $u \cdot v$ definiert O'BRIEN nicht algebraisch, er führt jedoch für dieses Produkt eine sog. *Direktrix* ein, die er mit $D(u \cdot v)$ bezeichnet. Diese ist definiert durch die Festsetzungen:

$$\begin{array}{lll} D(\alpha\cdot\beta) = \gamma, & D(\alpha\cdot\gamma) = -\beta, & D(\beta\cdot\gamma) = \alpha \\ D(\beta\cdot\alpha) = -\gamma, & D(\gamma\cdot\alpha) = \beta, & D(\gamma\cdot\beta) = -\alpha \end{array}$$

Damit zeigt O'BRIEN, daß die Direktirx $D(u \cdot v)$ eines Produktes $u \cdot v$ beliebiger gerichteter Strecken u,v eine gerichtete Strecke ist, die auf u und v normal steht und die Länge $mn\sin\theta$ hat. (Über die Orientierung sagt er nichts, doch gilt offensichtlich die Rechtsschraubenregel.) Daran erkennt man, daß die Direktrix $D(u \cdot v)$ dem modernen Vektorprodukt $u \times v$ entspricht.

3. Die Entwicklung der modernen Vektorrechnung

Ab HAMILTONs Tod (1865) war die weitere Entwicklung der Vektorrechnung fast ausschließlich eine Sache der Physiker. Dabei kann man zwei Phasen unterscheiden. In einer ersten Phase (ca. 1865-1880) wurden keine wesentlich neuen Ideen zum Vektorbegriff entwickelt, es ging vielmehr darum, abzutesten, inwieferne die vorhandenen vektoriellen Systeme in der Physik brauchbar sind (wobei es vor allem um eine Konfrontation der HAMILTONschen Quaternionen mit den GRASSMANNschen Ausdehnungsgrößen ging). Man darf nicht vergessen, daß es zu dieser Zeit unter den Physikern noch sehr viele Gegner der Vektorrechnung gegeben hat, z.B. Lord KELVIN. Die wichtigsten Vertreter dieser Phase sind TAIT (der Hauptvertreter der Quaternionentheorie), MAXWELL und CLIFFORD. Die letzten beiden gaben eine gewisse Unzufriedenheit mit der Quaternionentheorie zu erkennen, doch war ihre Kritik noch milde. In einer zweiten Phase (ca. 1880 - 1900), deren Hauptvertreter GIBBS und HEAVISIDE waren, wurden die Quaternionen endgültig aus der Physik verbannt. GIBBS und HEAVISIDE übernahmen mit großem Geschick aus der Quaternionentheorie das, was für die Physik brauchbar war, und ließen das weg bzw. änderten das, was nicht brauchbar war. Darüber hinaus entwickelten sie ein brauchbares Bezeichnungssystem. Insgesamt entwickelten sie – ziemlich unabhängig voneinander – eine Vektorrechnung, die bis auf unwesentliche Bezeichnungsunterschiede mit der heutigen Vektorrechnung übereinstimmt. GIBBS und HEAVISIDE können also als die eigentlichen Vollender der modernen Vektorrechnung bezeichnet werden.

In der Zeit von 1865 - 1900 wurde auch die *Vektoranalysis* weiterentwickelt. Dabei ging es vor allem um die Anwendung des schon von HAMILTON eingeführten Nabla-Operators $\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$. Infolge der Einführung des Feldbegriffes in die Physik durch FARADAY wurden verschiedene Vektorfelder untersucht und dabei entstanden heute gängige Begriffe der mehrdimensionalen Analysis wie *Gradient*, *Divergenz*, *Rotation* usw. Diese Entwicklung war eng verbunden mit der Entwicklung der Theorie der Mehrfachintegrale, Kurvenintegrale und Oberflächenintegrale bis hin zu den Sätzen von GREEN, GAUSS und STOKES.

4. Die Axiomatisierung des Vektorbegriffes

Wenn Mathematiker längere Zeit mit etwas arbeiten, tritt meist über kurz oder lang ein Moment der Reflexion ein und es wird die Frage gestellt: Was ist eigentlich dieses „etwas", mit dem wir die ganze Zeit gearbeitet haben? So muß ungefähr um 1900 die Frage aufgekommen sein: Was ist eigentlich ein Vektor? Es läßt sich allerdings nicht sagen, wann und wo diese Frage zum ersten Mal gestellt wurde. Diese Frage war nun gar nicht leicht zu beantworten. Denn im Lauf der Geschichte sind viele inhaltliche Vorstellungen von einem Vektor entwickelt worden: Vektor als Betrag und Richtung, als Punkt, als gewichteter Punkt, als (ortsabhängige oder ortsunabhängige) gerichtete Strecke, als orientierte Fläche, als Translation, als n-Tupel, als formaler Rechenausdruck usw. Diese Vorstellungen waren so verschieden, daß sie nicht unter einen Hut gebracht werden konnten.

Das Problem wurde schließlich so gelöst, wie Mathematiker solche Probleme immer lösen: der Vektorbegriff wurde axiomatisch definiert. Giuseppe PEANO (1858 - 1932) war derjenige, der den Begriff des *Vektorraumes* in der heutigen Form einführte, als eine Menge, in der bestimmte Operationen definiert sind und in der gewisse Axiome erfüllt sind. Von nun an war ein Vektor ein *Element eines Vektorraumes* und sonst nichts.

Aber ist das Problem damit wirklich gelöst? Zwar hat man durch die Vektorraumdefinition das offiziell festgehalten, worauf sich alle einigen konnten und das war im wesentlichen das Rechnen mit Vektoren. Aber wer mit Vektoren wirklich arbeiten will, muß wesentlich mehr wissen als das, was in der Definition des Vektorraumes steht. In dieser Definition steht ja z.B. nichts über die geometrischen Deutungen von Vektoren und deren Rechenoperationen oder über n-Tupel. Manchmal wird der Standpunkt vertreten: Offiziell ist nur das, was in der Vektorraumdefinition steht, was man sich sonst unter Vektoren vorstellt, ist Privatsache. Dieser Standpunkt wird heute von vielen Mathematikern (z.B. René THOM) und fast allen Mathematikdidaktikern für falsch gehalten - einfach weil Mathematik auf der formalen Ebene allein nicht funktioniert. Ich vergleiche einen mathematischen Begriff gerne mit einem Eisberg. Der über der Wasseroberfläche liegende Teil eines Begriffes ist der offizielle Teil, der in der Definition des Begriffes ausgedrückt wird. Aber zum Funktionieren von Mathematik ist auch der weitaus größere, unter der Wasseroberfläche liegende inoffizielle Teil notwendig.

Die im 20. Jahrhundert aufkommende formalistische Sichtweise der Mathematik sah von diesem inoffiziellen Teil schlichtweg ab, d.h. man vergaß diese Dinge oder besser: man verschwieg oder verdrängte sie. Aber bereits Daniel Gottlob FREGE (1848 - 1925) hat sich über diese *Methode des Absehens* lustig gemacht:

> Man hat das noch längst nicht genügend ausgenutzt. Einige Andeutung für weitere Verwertungen mögen daher nicht unerwünscht sein. Anwendungen können davon gemacht werden in der Metallurgie (Entphosphorung des Eisens), Pädagogik (Erziehung von Musterknaben), Medizin (Vermeidung störender Nebenwirkungen von Heilmitteln), Politik (Unschädlichmachung widerstrebender Parteien und feindlicher Mächte) und gewiß noch auf vielen anderen Gebieten.

FREGE fügt die Fußnote hinzu:

> Dieser Gedanke möchte indessen nicht neu sein; schon der Vogel Strauß soll einen ähnlichen gehabt haben.

Der Vektor als Element eines Vektorraumes kann also nicht der Weisheit letzter Schluß sein. Dies ist eine der Lehren, die man aus der Geschichte der Vektorrechnung ziehen kann: Ein mathematischer Begriff ist ständig in Entwicklung und nie fertig. So gesehen ist „Vektor" kein Fertigprodukt, sondern eher eine „Idee", die immer neue Ausprägungen erfährt. Die Titelfrage „Was ist ein Vektor?" läßt sich also wohl nie endgültig beantworten. Wir wissen nicht, was die Zukunft bringen wird. Von den Physikern hört man ja gelegentlich Unzufriedenheiten mit dem Vektorbegriff im Sinne des Vektorraumes, weil dadurch physikalische „Vektoren" angeblich nicht immer gut beschrieben werden. In der Tat gibt es bereits echte Veränderungen des Vektorbegriffes, z.B. die von PASTOR u.a. 1989 eingeführten „senseless vectors", die man als Doppelpfeile deuten kann und die Anwendungen bei der Untersuchung anisotroper Medien gefunden haben. Schließlich ist ein „Vektor" in den Computerwissenschaften auch nicht mehr ganz das, was er in der Mathematik ist.

Literatur:

CROWE, M. (1967): A History of Vector Analysis. University of Notre Dame, London.

EBBINGHAUS, H.-D. / HERMES, H. / HIRZEBRUCH, F. / KOECHER, M. / MAINZER, K. / PRESTEL, A. / REMMERT, R. (1983): Zahlen. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.

PASTOR, G. / FERREIRO, A. /JIMENEZ, I. / TORRES, M (1989): How to give a sense to senseless vectors in plane. Int. Journal for Education in Science and Technology, vol. 20, no. 3, p. 441-446.